Тема 2

Дифференцирование.

1. Дифференцируемость по Фреше.

Определение. *Пусть $\mathbb{H}$ и $\mathbb{F}$ — нормированные пространства. Отображение $J(u)$, действующее из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{F}$ и определенное в окрестности $O(u_0,\gamma) = \{u \in \mathbb{H} \mid ||u-u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma\}$* $= S_\gamma(u_0)$ *точки u_0 называется* **дифференцируемым по Фреше** *в точке u_0, если справедливо представление $J(u_0+h) - J(u_0) = Ah + \alpha(u_0,h)\ \forall h : ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma$, где A — линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{F}$, а $\lim\limits_{||h||_{\mathbb{H}}\to 0} \dfrac{||\alpha(u_0,h)||_{\mathbb{F}}}{||h||_{\mathbb{H}}} = 0$.*

$J(u): H \to F \quad \alpha(u_0,h): H \to F$

$J'(u_0)(h): H \to F$, причем линейно

Оператор A называется производной по Фреше отображения $J(u)$ в точке u_0 и обозначается $J'(u_0)$. {Если $\alpha(u_0,h)$ линейно отн. h, то $\alpha \equiv \theta_F$; но м.б. однородность $\alpha(u_0,\lambda h) = \lambda^p \alpha(u_0,h)$ степени $p>1$} $0 \xleftarrow[\lambda\to+0]{} \dfrac{||\alpha(u_0,\lambda h)||_F}{||\lambda h||_H \to 0} = \dfrac{\cancel{\lambda}||\alpha(u_0,h)||_F}{\cancel{\lambda}||h||_H \neq 0} \Rightarrow \alpha(u_0,h) \equiv \theta_F\ \forall h$ малых {здесь фиксировали $||h||_H \neq 0$, $\lambda \to +0$}

Для функционалов, действующих из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ в пространство $\mathbb{R}^1$, приведенное выше определение можно несколько видоизменить. Их производные являются линейными ограниченными операторами, действующими из пространства $\mathbb{H}$ в пространство $\mathbb{R}^1$, то есть эти производные есть элементы пространства $\mathbb{H}^*$. Однако, по теореме Рисса, $\mathbb{H} \cong \mathbb{H}^*$, то есть каждому элементу $h^* \in \mathbb{H}^*$ взаимно однозначно соответствует элемент $h \in \mathbb{H}$ такой, что $h^*u = \langle h, u\rangle_{\mathbb{H}}\ \forall u \in \mathbb{H}$. С учетом этого, дадим такое

Определение. *Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство. Функционал $J(u)$, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ и определенный в окрестности $O(u_0,\gamma) = \{u \in \mathbb{H} \mid ||u-u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma\}$ точки u_0 называется* **дифференцируемым по Фреше** *в точке u_0, если справедливо представление $J(u_0+h) - J(u_0) = \langle a, h\rangle_{\mathbb{H}} + \alpha(u_0,h)\ \forall h : ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma$, где $a \in \mathbb{H}$, а $\lim\limits_{||h||_{\mathbb{H}}\to 0} \dfrac{\alpha(u_0,h)}{||h||_{\mathbb{H}}} = 0$.*

Элемент a будем называть **градиентом** *функционала $J(u)$ в точке u_0. В дальнейшем мы будем употреблять обозначение* $\mathbf{J'(u_0) \cong a}$, *и подразумевать, что производная по Фреше $J'(u_0)$ есть линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ по правилу $J'(u_0)h = \langle a, h\rangle_{\mathbb{H}}$.* {$a = a_J$ — т.е. градиент для J}

Замечание. *Производная по Фреше обладает классическими свойствами:*

см. оборот +1. *Если отображение $J(u)$ дифференцируемо по Фреше в точке u_0, то его производная по Фреше $J'(u_0)$ определяется однозначно;*

+2. *Если $J_1(u)$ и $J_2(u)$ — два дифференцируемых по Фреше в точке u_0 отображения, действующих из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{F}$, то отображение $J(u) = \alpha J_1(u) + \beta J_2(u)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1)$ также дифференцируемо по Фреше в точке u_0, причем $J'(u_0) = \alpha J_1'(u_0) + \beta J_2'(u_0)$.*

+0. Из дифф-ти в т. u_0 следует непрерывность в т. u_0:

$H \xrightarrow{J} F$

$$||J(u_0+h) - J(u_0)||_F = ||\underbrace{J'(u_0)}_{\mathcal{L}(H\to F)}\underbrace{h}_{H} + \alpha(u_0,h)||_F \leq \underbrace{||J'(u_0)||_{\mathcal{L}(H\to F)}}_{const} \cdot \underbrace{||h||_H}_{\to 0} + \underbrace{||\alpha(u_0,h)||_F}_{\to 0} \xrightarrow[||h||_H\to 0]{} 0$$

{т.к. $\dfrac{||\alpha(u_0,h)||_F}{||h||_H} \xrightarrow[||h||_H\to 0]{} 0$}

но не следует слабая непрерывность и даже л/непр-ть могла

пример: $J(u) = \langle Au, u\rangle_{\ell_2}$ $Ax = (-x_1, x_2, -x_3, x_4, \dots)$ $\Rightarrow Ae_n = (-1)^n e_n$

① пусть $J(u_0+\lambda h)-J(u_0) = A_1(\lambda h) + \alpha_1(u_0,\lambda h) = A_2(\lambda h) + \alpha_2(u_0,\lambda h) \mapsto \frac{\cancel{\lambda} A_1 h}{\cancel{\lambda}\|h\|} + \frac{\alpha_1(u_0,\lambda h)}{\lambda\|h\|} = \frac{\cancel{\lambda} A_2 h}{\cancel{\lambda}\|h\|} + \frac{\alpha_2(u_0,\lambda h)}{\lambda\|h\|} \mapsto$

$\forall h \neq \vec{\theta}_H$ элем h – фикс.

рассм. $\lambda \to +0$

$\left\|\underbrace{\frac{1}{\|h\|}}_{\neq 0}(A_1-A_2)h\right\|_F = \underbrace{\left\|\underbrace{\frac{1}{\lambda\|h\|}}_{\to 0}\left(\alpha_2(u_0,\lambda h)-\alpha_1(u_0,\lambda h)\right)\right\|_F}_{\to 0} \mapsto$

-13.1-

$\mapsto (A_1-A_2)h = \vec{\theta}_F$ $\forall h \in H$, т.е. $A_1 - A_2 \equiv O$ (нулевой оператор), т.е. $A_1 \equiv A_2$ ч.т.д.

$\Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_2$

② $J(u) = \alpha J_1(u) + \beta J_2(u)$

$J(u_0+h) - J(u_0) = \alpha J_1(u_0+h) + \beta J_2(u_0+h) - \alpha J_1(u_0) - \beta J_2(u_0) = \alpha(A_1(h) + \alpha_1(u_0,h)) + \beta(A_2(h)+\alpha_2(u_0,h)) = \underbrace{(\alpha A_1 + \beta A_2)}_{A}(h) + \underbrace{\alpha \cdot \alpha_1(u_0,h) + \beta\cdot\alpha_2(u_0,h)}_{\bar{\alpha}(u_0,h)}$

$A \in \mathcal{L}(H\to F)$, $A = \alpha J_1'(u_0) + \beta J_2'(u_0)$

$\bar{\alpha}(u_0,h)$: $\frac{\|\bar{\alpha}(u_0,h)\|_F}{\|h\|_H} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$ ч.т.д.

$\|(\alpha A_1+\beta A_2)h\|_F \le (|\alpha|\,\|A_1\| + |\beta|\,\|A_2\|)\,\|h\|_F$

$A(\lambda\bar{h}+\mu\bar{\bar{h}}) = (\alpha A_1+\beta A_2)(\lambda\bar{h}+\mu\bar{\bar{h}}) = \alpha A_1(\lambda\bar{h}+\mu\bar{\bar{h}}) + \beta A_2(\lambda\bar{h}+\mu\bar{\bar{h}}) = \lambda A\bar{h} + \mu A\bar{\bar{h}}$

$(GF)(u) = G(F(u)) : \mathbb{H} \xrightarrow{F} \mathbb{F} \xrightarrow{G} \mathbb{K}$, $u \in \mathbb{H}$ $\quad F'(u) \in \mathcal{L}(H \to F)$, $G'(y) \in \mathcal{L}(F \to K)$

$GF : H \to K \Rightarrow (GF)'(u) \in \mathcal{L}(H \to K)$, $(GF)'(u) \underset{\text{по Th}}{=} [G'(F(u))][F'(u)]$ $\Rightarrow [(GF)'(u)]h = [G'(F(u))](F'(u)h)$

Следствие из теоремы: Если $F = K = R^1$, то $H \ni a_F(u) \cong F'(u) \in \mathcal{L}(H \to R^1)$, $R^1 \ni a_G(y) \cong G'(y) \in \mathcal{L}(R^1 \to R^1)$; $GF : H \to R^1$, $(GF)'(u) \in \mathcal{L}(H \to R^1)$ $\Rightarrow [(GF)'(u)]h = [G'(F(u))](F'(u)h)$ $\forall h \in H$; $[G'(y)]x = a_G(y) \cdot x$; $a_G(F(u)) \cdot \langle a_F(u), h \rangle_H = \langle a_G(F(u)) \cdot a_F(u), h \rangle_H$, $a_{GF}(u)$

Теорема. *(о дифференцировании сложного отображения)*

Пусть $\mathbb{H}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{K}$ — нормированные пространства, $O(u_0, \gamma_1)$ — окрестность точки $u_0 \in \mathbb{H}$, отображение F отображает $O(u_0, \gamma_1)$ в $\mathbb{F}$, $y_0 = F(u_0)$, $O(y_0, \gamma_2)$ — окрестность точки y_0, отображение G отображает $O(y_0, \gamma_2)$ в $\mathbb{K}$. Тогда если отображение F дифференцируемо по Фреше в точке u_0, а отображение G дифференцируемо по Фреше в точке y_0, то сложное отображение GF дифференцируемо по Фреше в точке u_0, причем $(GF)'(u_0) = G'(y_0)F'(u_0)$.

$\boxed{(GF)'(u) \cong a_G(F(u)) \cdot a_F(u)}$

Определение. *Пусть $\mathbb{H}$ и $\mathbb{F}$ — нормированные пространства, отображение $J(u)$ действует из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{F}$ и дифференцируемо по Фреше в каждой точке окрестности $O(u_0, \gamma) = \{u \in \mathbb{H} \mid ||u - u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma\}$ точки u_0. Говорят, что отображение $J(u)$* **дважды дифференцируемо по Фреше** *в точке u_0, если отображение $J'(u)$ диффеpеренцируемо по Фреше в точке u_0, то есть существует линейный ограниченный оператор B, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$, такой, что*

$J'(u) : H \to \mathcal{L}(H \to F)$ $\quad \beta(u_0, h) : H \to \mathcal{L}(H \to F)$
$J''(u_0)(h) : H \to \mathcal{L}(H \to F)$, причем линейно

$$J'(u_0 + h) - J'(u_0) = Bh + \beta(u_0, h) \ \forall h : ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma, \ \lim_{||h||_{\mathbb{H}} \to 0} \frac{||\beta(u_0, h)||_{\mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})}}{||h||_{\mathbb{H}}} = 0.$$

Оператор B называется второй производной по Фреше отображения $J(u)$ в точке u_0 и обозначается $J''(u_0)$.

{Если $\beta(u_0, h)$ линейно от h, то $\beta \equiv 0 \in \mathcal{L}(H \to F)$; но м.б. однородность степени $p > 1$ $\beta(u_0, \lambda h) = \lambda^p \beta(u_0, h)$: для фикс. $h \neq \theta_H$, $\lambda \to 0$: $\frac{||\beta(u_0, \lambda h)||_{\mathcal{L}}}{||\lambda h||_H} = \frac{\lambda^{p-1} ||\beta(u_0, h)||_{\mathcal{L}}}{||h||_H} \to 0 \Rightarrow \beta(u_0, h) \equiv 0 \in \mathcal{L}(H \to F)$ $\forall h$ малых}

Замечание. *Вторая производная по Фреше является симметричным оператором, то есть $(J''(u_0)g)h = (J''(u_0)h)g \ \forall u_0 \in \mathbb{H}, \ \forall g, h \in \mathbb{H}$.* {нетривиальный факт, без док-ва}

Для случая, когда $\mathbb{H}$ (гильб.), а $\mathbb{F} = \mathbb{R}^1$, с учетом того, что $\mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{R}^1) = \mathbb{H}^* \cong \mathbb{H}$, трансформируем это определение следующим образом:

Определение. *Пусть функционал $J(u)$ действует из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ и дифференцируем по Фреше в каждой точке окрестности $O(u_0, \gamma) = \{u \in \mathbb{H} \mid ||u - u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma\}$ точки u_0. Говорят, что $J(u)$* **дважды дифференцируем по Фреше** *в точке u_0, если отображение $J'(u)$ ($\cong a(u)$) диффеpеренцируемо по Фреше в точке u_0, то есть существует линейный ограниченный оператор B (b), действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, такой, что приращение* **градиента** *$J'(u_0)$ ($a(u_0) \cong$) представимо в виде* {b-малое соотв. B-большому так же как a-малое соотв. A-большому в опр. 1-й производ. и град.}

$$J'(u_0 + h) - J'(u_0) = Bh + \beta(u_0, h) \ \forall h : ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma, \ \lim_{||h||_{\mathbb{H}} \to 0} \frac{||\beta(u_0, h)||_{\mathbb{H}}}{||h||_{\mathbb{H}}} = 0.$$

$a(u_0 + h) \in \mathbb{H} \ni a(u_0)$, b

{$b = b_J$ — т.е. гессиан ф-ла J}

Оператор B (b) будем называть **гессианом** функционала $J(u)$. В дальнейшем мы будем употреблять обозначение $\mathbf{J''(u_0) \cong B}$ (b), и подразумевать, что вторая производная по Фреше $J''(u_0)$ есть линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}^*$, причем $(J''(u_0)h)g = \langle Bh, g \rangle_{\mathbb{H}} \ \forall h, g \in \mathbb{H}$.

Теорема. *(формула Тейлора для произвольного отображения)*

Пусть отображение $J(u)$, действующее из нормированного пространства $\mathbb{H}$ в нормированное пространство $\mathbb{F}$, определено и дважды дифференцируемо по Фреше в шаре $O(u_0, \gamma) = \{u \in \mathbb{H} \mid ||u - u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma\}$, причем отображение $J''(u)$ непрерывно в точке u_0. Тогда справедлива формула Тейлора {см. оборот след. листа 15}

$$J(u_0 + h) - J(u_0) = J'(u_0)h + \frac{1}{2}(J''(u_0)h)h + o(||h||^2_{\mathbb{H}}) \ \forall h : ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma.$$

Теорема. *(формула Тейлора для функционала)*

Пусть функционал $J(u)$ определен и дважды дифференцируем по Фреше в шаре $O(u_0, \gamma) = \{u \in \mathbb{H} \mid ||u - u_0||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma\}$, причем отображение $J''(u)$ непрерывно в точке u_0. Тогда справедлива формула Тейлора { — см. оборот — }

$$J(u_0 + h) - J(u_0) = \langle \overset{a(u_0)\cong}{J'(u_0)}, h\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2}\langle \overset{b(u_0)\cong}{J''(u_0)}h, h\rangle_{\mathbb{H}} + o(||h||^2_{\mathbb{H}})\ \forall h : ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant \gamma,$$

где $J'(u_0) \cong$ a(u₀) — градиент функционала $J(u)$ в точке u_0, а $J''(u_0) \cong$ гессиану, т.е. $b(u_0)$

Производные простейших функционалов:

+1. Линейный функционал $\mathbf{J(u)} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{H}}$, $c \in \mathbb{H}$. Для нахождения его производной воспользуемся определением:

$$J(u_0 + h) - J(u_0) = \langle c, u_0 + h\rangle_{\mathbb{H}} - \langle c, u_0\rangle_{\mathbb{H}} = \langle c, h\rangle_{\mathbb{H}},$$

поэтому $J'(u_0) \cong c\ \forall u_0 \in \mathbb{H}$, то есть первая производная линейного функционала есть линейный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ по правилу $J'(u_0)h = \langle c, h\rangle_{\mathbb{H}}$. Градиент этого функционала всегда равен c, поэтому $J'(u_0 + h) - J'(u_0) \cong \Theta_{\mathbb{H}} = Oh$, где O — нулевой оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$. Значит, $J''(u_0) \cong O$, гессианом этого функционала является нулевой оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.

+2. Квадратичный функционал $\mathbf{J(u)} = ||\mathbf{Au} - \mathbf{f}||^2_{\mathbb{F}}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$, $f \in \mathbb{F}$. Рассмотрим его приращение:

$$J(u_0 + h) - J(u_0) = ||A(u_0 + h) - f||^2_{\mathbb{F}} - ||Au_0 - f||^2_{\mathbb{F}} = ||(Au_0 - f) + Ah||^2_{\mathbb{F}} - ||Au_0 - f||^2_{\mathbb{F}} =$$

$$= ||Au_0 - f||^2_{\mathbb{F}} + 2\langle Au_0 - f, Ah\rangle_{\mathbb{F}} + ||Ah||^2_{\mathbb{F}} - ||Au_0 - f||^2_{\mathbb{F}} = \langle 2A^*(Au_0 - f), h\rangle_{\mathbb{H}} + ||Ah||^2_{\mathbb{F}}.$$

Из полученного представления, с учетом того, что $||Ah||^2_{\mathbb{F}} \leqslant ||A||^2 \cdot ||h||^2_{\mathbb{H}} = o(||h||_{\mathbb{H}})$, мы имеем $J'(u_0) \cong 2A^*(Au_0 - f)$, то есть производная этого функционала есть линейный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ по правилу $J'(u_0)h = \langle 2A^*(Au_0 - f), h\rangle_{\mathbb{H}}$, а градиент этого функционала есть элемент $2A^*(Au_0 - f)$ пространства $\mathbb{H}$. После этого, рассматривая приращение градиента $J'(u_0)$, имеем

$$\overbrace{J'(u_0 + h) - J'(u_0)}^{a(u_0)\cong} \cong \overbrace{2A^*(A(u_0 + h) - f)}^{a(u_0+h)\cong} - \overbrace{2A^*(Au_0 - f)}^{a(u_0)\cong} = 2A^*Ah \cong J''(u_0)h$$

Таким образом, $J''(u_0) \cong 2A^*A$, гессианом этого функционала является оператор $2A^*A$, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$. т.е. $(J''(u_0)h)g = \langle 2A^*Ah, g\rangle_H\ \forall h,g \in H$

+3. Квадратичный функционал $\mathbf{J(u)} = \langle \mathbf{Au}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{H}}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H})$. Поступая так же, как и в предыдущем случае, имеем

$$J(u_0 + h) - J(u_0) = \langle A(u_0 + h), u_0 + h\rangle_{\mathbb{H}} - \langle Au_0, u_0\rangle_{\mathbb{H}} =$$

$$= \langle Au_0, u_0\rangle_{\mathbb{H}} + \langle Au_0, h\rangle_{\mathbb{H}} + \langle Ah, u_0\rangle_{\mathbb{H}} + \langle Ah, h\rangle_{\mathbb{H}} - \langle Au_0, u_0\rangle_{\mathbb{H}} = \langle (A + A^*)u_0, h\rangle_{\mathbb{H}} + \langle Ah, h\rangle_{\mathbb{H}}.$$

Заметив, что $|\langle Ah, h\rangle_{\mathbb{H}}| \leqslant ||Ah||_{\mathbb{H}} \cdot ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant ||A|| \cdot ||h||^2_{\mathbb{H}} = o(||h||_{\mathbb{H}})$, мы получаем $J'(u_0) \cong (A + A^*)u_0$, то есть производная этого функционала есть линейный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^1$ по правилу $J'(u_0)h = \langle (A + A^*)u_0, h\rangle_{\mathbb{H}}$, а градиент этого функционала есть

$$J(u_0+h) - J(u_0) = J'(u_0)h + \frac{1}{2}\left(J''(u_0)h\right)h + \bar{\bar{o}}\left(\|h\|_H^2\right)$$

$J: H \to F$

$J''(u) \in \mathcal{L}(H \to \mathcal{L}(H \to F))$

-15.1-

$J''(u)$ непрерывно в т. u_0:

$$\|J''(u_0+h) - J''(u_0)\|_{\mathcal{L}(H \to \mathcal{L}(H \to F))} \xrightarrow[]{\|h\|_H \to 0} 0$$

$$\| $$

$$\sup_{g \neq \theta_H} \frac{\|(J''(u_0+h) - J''(u_0))g\|_{\mathcal{L}(H \to F)}}{\|g\|_H}, \text{ где } \|(J''(u_0+h) - J''(u_0))g\|_{\mathcal{L}(H \to F)} = \sup_{f \neq \theta_H} \frac{\|((J''(u_0+h) - J''(u_0))g)f\|_F}{\|f\|_H}$$

$$\| $$

$$\sup_{g \neq \theta_H} \frac{\left\{\sup_{f \neq \theta_H} \frac{\|((J''(u_0+h) - J''(u_0))g)f\|_F}{\|f\|_H}\right\}}{\|g\|_H} \xrightarrow[\|h\|_H \to 0]{} 0$$

т.е. проверяем так:

фикс. $h \in H$, $h \neq \theta_H$ → фикс. $g \in H$, $g \neq \theta_H$ → вычисл. $\left\{\sup_{f \neq \theta_H} \cdots\right\} = P(h,g)$, $P: H \setminus \{\theta_H\} \times H \setminus \{\theta_H\} \mapsto R^1$ → вычисл. $Q(h) = \sup_{g \neq \theta_H} \frac{P(h,g)}{\|g\|_H}$, $Q: H \setminus \{\theta_H\} \to R^1$ → проверяем $Q(h) \xrightarrow[\|h\|_H \to 0]{} 0$

$$J(u_0+h) - J(u_0) = \langle \underbrace{\overset{\in H}{a(u_0)}}_{= J'(u_0)}, h \rangle_H + \frac{1}{2}\langle \underbrace{\overset{\in \mathcal{L}(H \to H)}{b(u_0)}}_{= J''(u_0)} h, h \rangle_H + \bar{\bar{o}}\left(\|h\|_H^2\right)$$

$J: H \to R^1$

$\approx J''(u)$

$b(u)$ непрерывен в т. u_0:

$$\|b(u_0+h) - b(u_0)\|_{\mathcal{L}(H \to H)} \xrightarrow[]{\|h\|_H \to 0} 0$$

$$\| $$

$$\sup_{g \neq \theta_H} \frac{\|(b(u_0+h) - b(u_0))g\|_H}{\|g\|_H} \xrightarrow[\|h\|_H \to 0]{} 0$$

т.е. проверяем так:

фикс. $h \in H$, $h \neq \theta_H$ → вычисляем $R(h) = \sup_{g \neq \theta_H} \frac{\|(b(u_0+h) - b(u_0))g\|_H}{\|g\|_H}$ → проверяем $R(h) \xrightarrow[\|h\|_H \to 0]{} 0$, $R: H \setminus \{\theta_H\} \to R^1$

элемент $(A + A^*)u_0$ пространства $\mathbb{H}$. Наконец, записывая приращение градиента $\overset{a(u_0)\cong}{J'(u_0)}$, находим

$$J'(u_0 + h) - J'(u_0) \cong (A + A^*)(u_0 + h) - (A + A^*)u_0 = (A + A^*)h \cong J''(u_0)h$$

стало быть, $J''(u_0) \cong A + A^*$, гессианом этого функционала является оператор $A + A^*$, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$. т.е. $(J''(u_0)h)g = \langle (A+A^*)h, g\rangle_H \ \forall h, g \in H$

+ Пример 1

Найти первую и вторую производную по Фреше функционала

$$J(u) = ||u||^p_{\mathbb{H}},\ \mathbb{H} - \text{ гильбертово.}$$

при $p<0$: $J(h) \xrightarrow[\|h\|\to+0]{} +\infty$ ⇒ нет непр-ти при $u=\Theta_H$ ⇒ нет дифф-ти при $u=\Theta_H$

$p=0$: $J(u)\equiv 1$ дифф-ма $J'(u)\cong\Theta_H$ (считаем $J(\Theta_H)=1$)

см. стр. 14 следствие из Th

Решение. *Для нахождения первой производной этого функционала воспользуемся теоремой о производной сложного отображения. Положим* $J(u) = F(G(u))$, *где* $G(u) = ||u||^2_{\mathbb{H}}$, $G : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1$, $F(t) = t^{\frac{p}{2}}$, $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. *Тогда* $G'(u) \cong 2u \notin \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{R}^1)$, $F'(t) \cong \frac{p}{2}t^{\frac{p}{2}-1} \notin \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1)$. *Исходя из этого, имеем*

$$J'(u) = F'(G(u))G'(u) \cong \overbrace{\frac{p}{2}\left((||u||^2_{\mathbb{H}})^{\frac{p}{2}-1}\right)}^{a_F(G(u))} \cdot \overset{a_G(u)}{2u} = \underbrace{\overset{H}{p||u||^{p-2}_{\mathbb{H}}u}}_{\text{это градиент отображения } J(u)},\quad \overset{a_J(u)}{} J'(u) \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{R}^1).$$

Отметим, что отображение G *дифференцируемо на всём* $\mathbb{H}$, *а отображение* F *дифференцируемо при* $p \geqslant 2$ *на всём* $\mathbb{R}^1$. *Поэтому при* $p \geqslant 2$ *полученная формула справедлива для всех* $u \in \mathbb{H}$. *Если же* $p < 2$, *то отображение* F *становится недифференцируемым при* $t = 0$, *поэтому пока что можно утверждать, что полученная формула будет справедлива для всех* $u \neq \Theta_{\mathbb{H}}$. *Тем не менее, функционал* $J(u)$ *будет дифференцируемым в точке* $\Theta_{\mathbb{H}}$ *при всех* $p > 1$, *в чём легко убедиться с помощью определения производной по Фреше:*

нулевой $O \in \mathcal{L}(H\to R^1)$

$$J(\Theta_{\mathbb{H}} + h) - J(\Theta_{\mathbb{H}}) = ||h||^p_{\mathbb{H}} = \langle \overset{\text{градиент}}{\Theta_{\mathbb{H}}}, h\rangle_{\mathbb{H}} + o(||h||)\ \forall h \in \mathbb{H},$$

то есть $J'(\Theta_{\mathbb{H}}) \cong \Theta_{\mathbb{H}}$. *Наконец, при* $0 < p \leqslant 1$ *функционал* $J(u)$ *не будет дифференцируем в точке* $\Theta_{\mathbb{H}}$. *Для обоснования этого факта опять-таки воспользуемся определением производной. Пусть существует такой элемент* $c \in \mathbb{H}$, *что* $J'(\Theta_{\mathbb{H}}) \cong c$. *Тогда, рассматривая произвольное малое положительное* α *и некоторый* ($\forall$) *элемент* h ($\neq \Theta_H$) *из* $\mathbb{H}$, *имеем*

$$\begin{cases} J(\Theta_{\mathbb{H}} + \alpha h) - J(\Theta_{\mathbb{H}}) = \langle c, \alpha h\rangle_{\mathbb{H}} + o(||\alpha h||_{\mathbb{H}}), \\ J(\Theta_{\mathbb{H}} - \alpha h) - J(\Theta_{\mathbb{H}}) = \langle c, -\alpha h\rangle_{\mathbb{H}} + o(||-\alpha h||_{\mathbb{H}}), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ||\alpha h||^p_{\mathbb{H}} = \alpha\langle c, h\rangle_{\mathbb{H}} + o(||\alpha h||_{\mathbb{H}}), \\ ||\alpha h||^p_{\mathbb{H}} = -\alpha\langle c, h\rangle_{\mathbb{H}} + o(||\alpha h||_{\mathbb{H}}). \end{cases} (*)$$

Можно вычесть: (*) ⇒ $0 = 2\alpha\langle c,h\rangle + \bar{o}(\|\alpha h\|)$ ⇒ $2\langle c,h\rangle + \|h\|\frac{\bar{o}(\alpha\|h\|)}{\alpha\|h\|} = 0$, const, $\alpha\to+0$ ⇒ $\langle c,h\rangle = 0\ \forall h\neq\theta$ ⇒ $J(h)-J(\theta) = \langle c,h\rangle + \bar{o}(\|h\|)$, $\|h\|^p_H$, $\langle c,h\rangle = 0$ — это неверно

Складывая эти соотношения, имеем $2||\alpha h||^p_{\mathbb{H}} = o(||\alpha h||_{\mathbb{H}})$, *что является противоречием. Итак,* $J'(u) \cong p||u||^{p-2}_{\mathbb{H}}u$, *если* $u \neq \Theta_{\mathbb{H}}$, $J'(\Theta_{\mathbb{H}}) \cong \Theta_{\mathbb{H}}$ *при* $p > 1$, $J'(\Theta_{\mathbb{H}})$ *не существует при* $p \leqslant 1$.

Для нахождения второй производной функционала $J(u)$ *рассмотрим приращение его градиента. Пусть* $u \neq \Theta_{\mathbb{H}}$, *тогда, пользуясь полученной только что формулой для вычисления градиента* $J(u)$ *и определением дифференцируемости по Фреше, имеем*

$$J'(u + h) - J'(u) \cong p(||u + h||^{p-2}_{\mathbb{H}}(u + h) - ||u||^{p-2}_{\mathbb{H}}u) = p(||u + h||^{p-2}_{\mathbb{H}} - ||u||^{p-2}_{\mathbb{H}})u+$$

$$+p(||u + h||^{p-2}_{\mathbb{H}} - ||u||^{p-2}_{\mathbb{H}})h + p||u||^{p-2}_{\mathbb{H}}h = p(\langle (p-2)||u||^{p-4}u, h\rangle_{\mathbb{H}} + \alpha(u, h))u+$$

Пусть справедливо $J'(h)-J'(\theta)\cong Bh+\bar{\bar{o}}(\|h\|)$, $B: H\to H$ лин., огр.

Рассм. $\forall h\neq\theta$, $\alpha>0$ — скал. параметр

$\Rightarrow J'(\theta+\alpha h)-J'(\theta)\cong B(\alpha h)+\bar{\bar{o}}(\|\alpha h\|)=\alpha Bh+\bar{\bar{o}}(\alpha\|h\|)$

$p\|\alpha h\|^{p-2}\cdot\alpha h$ $\quad \left\|\dfrac{p\|\alpha h\|^{p-2}\alpha h}{\alpha\|h\|}\right\| = \left\|\dfrac{\alpha Bh}{\alpha\|h\|}+\dfrac{\bar{\bar{o}}(\alpha\|h\|)}{\alpha\|h\|}\right\|\leq\underbrace{\left\|B\dfrac{h}{\|h\|}\right\|}_{\text{const}\leq\|B\|\cdot 1}+\dfrac{\|\bar{\bar{o}}(\alpha\|h\|)\|}{\alpha\|h\|}\xrightarrow[\alpha\to+0]{}0$

$\text{const}>0 = \dfrac{p\|h\|^{p-2}}{\alpha^{2-p}} \to +\infty$ противореч.

$p\|u\|^{p-2}E$ очевидно линеен и ограничен

$[B(u)](\alpha h_1+\beta h_2)=\|u\|^{p-4}\langle u,\alpha h_1+\beta h_2\rangle u=\alpha[B(u)]h_1+\beta[B(u)]h_2$ линейность

$\|[B(u)]h\|_H=\|\|u\|^{p-4}\cdot\langle u,h\rangle\cdot u\|_H\leq\underbrace{\|u\|_H^{p-2}}_{\text{const}}\cdot\|h\|_H$ огр-ть

$$+p(\langle(p-2)||u||^{p-4}u,h\rangle_{\mathbb{H}}+\alpha(u,h))h+p||u||_{\mathbb{H}}^{p-2}h=\left(p(p-2)B(u)+p||u||_{\mathbb{H}}^{p-2}E\right)h+\beta(u,h),$$

где E — единичный оператор, $B(u)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ по правилу $B(u)h=\langle||u||^{p-4}u,h\rangle_{\mathbb{H}}u$, а $\beta(u,h)=p(p-2)\langle||u||^{p-4}u,h\rangle_{\mathbb{H}}h+p\alpha(u,h)(u+h)$, причём, в силу того, что $\lim\limits_{||h||_{\mathbb{H}}\to0}\dfrac{|\alpha(u,h)|}{||h||_{\mathbb{H}}}=0$, *справедливо* $\lim\limits_{||h||_{\mathbb{H}}\to0}\dfrac{||\beta(u,h)||_{\mathbb{H}}}{||h||_{\mathbb{H}}}=0.$

сумма лин. и огр-х очевидно лин. и огр.

Стало быть, оператор $p(p-2)B(u)+p||u||_{\mathbb{H}}^{p-2}E$ будет гессианом функционала $J(u)$. Если $u=\Theta_{\mathbb{H}}$, то, поступая аналогично, при $p>1$ имеем $J'(\Theta_{\mathbb{H}}+h)-J'(\Theta_{\mathbb{H}})\cong p||h||_{\mathbb{H}}^{p-2}h$. Видно, что приращение градиента при $p\neq2$ нелинейно по h. Однако, если $p>2$, мы можем утверждать, что $J'(\Theta_{\mathbb{H}}+h)-J'(\Theta_{\mathbb{H}})\cong Oh+p||h||_{\mathbb{H}}^{p-2}h$ (O — нулевой оператор), причём

из H в H

$$\lim_{||h||_{\mathbb{H}}\to0}\frac{||p||h||_{\mathbb{H}}^{p-2}h||_{\mathbb{H}}}{||h||_{\mathbb{H}}}=\lim_{||h||_{\mathbb{H}}\to0}\frac{p||h||_{\mathbb{H}}^{p-1}}{||h||_{\mathbb{H}}}=\lim_{||h||_{\mathbb{H}}\to0}p||h||_{\mathbb{H}}^{p-2}=0.$$

Поэтому гессианом функционала $J(u)$ в точке $\Theta_{\mathbb{H}}$ будет нулевой оператор. Если $p=2$, то $J'(\Theta_{\mathbb{H}}+h)-J'(\Theta_{\mathbb{H}})\cong2h$, и гессианом функционала $J(u)$ в точке $\Theta_{\mathbb{H}}$ будет удвоенный единичный оператор. Если же $1<p<2$, то, рассуждая так же, как и для градиента, мы получим, что функционал $J(u)$ не будет дважды дифференцируем по Фреше в точке $\Theta_{\mathbb{H}}$.

Итак, $J''(u)\cong p(p-2)B(u)+p||u||^{p-2}E$, если $u\neq\Theta_{\mathbb{H}}$, $J''(\Theta_{\mathbb{H}})\cong O$ при $p>2$, $J''(\Theta_{\mathbb{H}})\cong2E$ при $p=2$, $J''(\Theta_{\mathbb{H}})$ не существует при $p<2$; $B(u)\in\mathfrak{L}(\mathbb{H}\to\mathbb{H})$, $B(u)h=||u||_{\mathbb{H}}^{p-4}\langle u,h\rangle_{\mathbb{H}}u$, $O\in\mathfrak{L}(\mathbb{H}\to\mathbb{H})$ — нулевой оператор, $E\in\mathfrak{L}(\mathbb{H}\to\mathbb{H})$ — единичный оператор.

+ Пример 2

Найти первую и вторую производную по Фреше функционала

$$J(u)=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\sqrt{t}}u(s)\,ds\right)^2dt,\ u(t)\in L^2[0,1].$$

Решение. *Заметим, что наш функционал может быть записан в виде $J(u)=||Au||_{L^2[0,1]}^2$, где оператор A действует по правилу*

при $t_0, t_0+\Delta t\in[a,b]$ $\quad |F(t_0+\Delta t)-F(t_0)|=\left|\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}u(s)\,ds\right|=\left|\langle u(\cdot),\mathbb{1}_{t_0}^{t_0+\Delta t}\rangle_{L^2(a,b)}\right|\leq\underbrace{\|u\|}_{\text{const}}\cdot\underbrace{\|\mathbb{1}_{t_0}^{t_0+\Delta t}\|}_{\sqrt{\Delta t}\to0}$

$$Au(t)=\int\limits_0^{\sqrt{t}}u(s)\,ds.$$

для $F(t)=\int_c^t u(s)\,ds$, $c\in[a,b]$ $\Rightarrow$ $F(t)$ — непр. на $[a,b]$ $\to F(t)\in L^2(a,b)$

Ясно, что результатом действия этого оператора будет также элемент из пространства $L^2[0,1]$. Теперь проверим линейность и ограниченность этого оператора.

$$A(u(t)+v(t))=\int\limits_0^{\sqrt{t}}(u(s)+v(s))\,ds=\int\limits_0^{\sqrt{t}}u(s)\,ds+\int\limits_0^{\sqrt{t}}v(s)\,ds=Au(t)+Av(t);$$

$$A(\lambda u(t)) = \int\limits_0^{\sqrt{t}} \lambda u(s)\ ds = \lambda \int\limits_0^{\sqrt{t}} u(s)\ ds = \lambda A u(t).$$

Линейность установлена. Далее, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$||Au(t)||^2_{L^2(0,1)} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{t}} u(s)\ ds \right)^2 dt \leqslant \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{t}} 1 \cdot |u(s)|\ ds \right)^2 dt \leqslant \{\text{нер-во Гёльдера}\} \leqslant$$

К-Б

$$\leqslant \int\limits_0^1 \left(\sqrt{\int\limits_0^{\sqrt{t}} 1^2\ ds} \cdot \sqrt{\int\limits_0^{\sqrt{t}} u^2(s)\ ds} \right)^2 dt = \int\limits_0^1 (\sqrt{t})^2 \cdot \int\limits_0^{\sqrt{t}} u^2(s)\ ds\ dt \leqslant$$

$$\leqslant \{0 \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1,\ u^2(s) \geqslant 0\} \leqslant \int\limits_0^1 1 \cdot \int\limits_0^1 u^2(s)\ ds\ dt = \int\limits_0^1 ||u(t)||^2_{L^2(0,1)}\ dt = ||u(t)||^2_{L^2(0,1)}.$$

Значит, оператор A является ограниченным. Таким образом, первая и вторая производные по Фреше нашего функционала могут быть вычислены по стандартной формуле, а именно $J'(u) \cong 2A^*Au$, $J''(u) \cong 2A^*A$. Итак, нам необходимо вычислить результат применения сопряженного оператора A^* к произвольному элементу $v(t)$ из $L^2[0,1]$. Будем действовать по определению:

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds\right) \overset{\text{п.в.}}{=} u(t)$$

$\int$-л Л. можно по частям

$g(t)$ – непр. дифф.

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{A}^{g(t)} u(s)ds\right) \overset{\text{п.в.}}{=} u(g(t))g'(t)$$

$$\langle Au(t), v(t)\rangle_{L^2[0,1]} = \int\limits_0^1 v(t) \cdot \int\limits_0^{\sqrt{t}} u(s)\ ds\ dt = \int\limits_0^1 \left(-\int\limits_t^1 v(s)\ ds \right)'_t \cdot \int\limits_0^{\sqrt{t}} u(s)\ ds\ dt =$$

$$= \cancel{-\int\limits_t^1 v(s)\ ds \cdot \int\limits_0^{\sqrt{t}} u(s)\ ds \Bigg|_0^1} + \int\limits_0^1 \left(\int\limits_t^1 v(s)\ ds \right) \cdot \left(\int\limits_0^{\sqrt{t}} u(s)\ ds \right)'_t dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_t^1 v(s)\ ds \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot u(\sqrt{t})\ dt = \{\sqrt{t} = p\} = \int\limits_0^1 u(p) \cdot \int\limits_{p^2}^1 v(s)\ ds\ dp = \langle u(t), A^*v(t)\rangle_{L^2[0,1]},$$

где сопряженный оператор A^* действует по правилу

$$A^*v(t) = \int\limits_{t^2}^1 v(s)\ ds.$$

Итак, первая производная по Фреше нашего функционала представляет собой линейный оператор, действующий из $L^2(0,1)$ в $\mathbb{R}^1$ по правилу

$$\underbrace{J'(u)}_{\text{опер.}}h(t) = \langle \underbrace{J'(u)}_{\text{град.}}, h(t)\rangle_{L^2[0,1]} = 2\int\limits_0^1 \underbrace{\left(\int\limits_{t^2}^1 \underbrace{\int\limits_0^{\sqrt{\tau}} u(s)\ ds}_{= Au(\tau)}\ d\tau \right)}_{= A^*(Au)} \cdot h(t)\ dt,$$

$d(u) = 2A^*Au$

вторая же его производная по Фреше есть линейный оператор, действующий из $L^2[0,1]$ в пространство линейных операторов, действующих из $L^2[0,1]$ в $\mathbb{R}^1$, то есть результатом применения оператора $J''(u)$ к некоторому элементу $h(t)$ пространства $L^2[0,1]$ является линейный оператор, действующий на какой-то элемент $g(t)$ пространства $L^2[0,1]$ по правилу

$$\underbrace{(J''(u)h(t))}_{\text{опер.}}g(t) = \langle \underbrace{J''(u)}_{\text{гессиан}}h(t), g(t)\rangle_{L^2[0,1]} = 2\int\limits_0^1 \left(\overbrace{\int\limits_{t^2}^1 \underbrace{\int\limits_0^{\sqrt{\tau}} h(s)\ ds}_{Ah(\tau)}\ d\tau}^{A^*Ah(t)} \right) \cdot g(t)\ dt.$$

$b(u) = 2A^*A$

Отметим, что в данном примере вторая производная по Фреше не зависит от u.

Необходимые условия экстремума:

Сформулируем в терминах первых и вторых производных необходимые условия экстремума функционалов, определённых в бесконечномерных банаховых (гильбертовых) пространствах.

л.ф.-сим. $J'(u_*)$ будет $A = \Theta$ нулевой; тогда производной по Фреше

Теорема. *(необходимые условия экстремума)* (см. доказ.)

Пусть функционал $J(u)$ определён на некотором банаховом (гильбертовом) пространстве $\mathbb{B}$ и пусть $J_* = \inf\limits_{u\in\mathbb{B}} J(u) = J(u_*)$. Если $J(u)$ дифференцируем по Фреше в точке u_*, то необходимо выполняется равенство $J'(u_*) \cong \vec{\theta}_{\mathbb{B}}$. (или u_* - лок. extr) лучше считать $J: H \to \mathbb{R}^1$

Если, кроме того, $J(u)$ дважды дифференцируем по Фреше в точке u_*, то необходимо выполняется ещё и условие $\langle J''(u_*)b, b\rangle_{\mathbb{B}} \geqslant 0\ \forall b \in \mathbb{B}$. (гессиан $\cong b(u_*)$)

В отличие от конечномерного случая, условие $\langle J''(u_*)b, b\rangle_{\mathbb{B}} > 0\ \forall b \neq \theta_{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}$ **не является достаточным**. Это можно проиллюстрировать на таком примере: рассмотрим функционал

(+ Пример)

$$J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x_n^2}{n^3} - x_n^4 \right)\ :\ \ell^2 \to \mathbb{R}^1.$$

Для начала вычислим его градиент и гессиан, воспользовавшись определением:

$$J(x+h) - J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2x_n h_n}{n^3} - 4x_n^3 h_n + \frac{h_n^2}{n^3} - 6x_n^2 h_n^2 - 4x_n h_n^3 - h_n^4 \right) = \langle y, h\rangle_{\ell^2} + \overbrace{o(||h||_{\ell^2})}^{M(x,h)},$$

где $y^{(x)}$ — элемент пространства ℓ^2 с компонентами $y_n^{(x)} = \frac{2x_n}{n^3} - 4x_n^3$. Таким образом, если

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ \text{то}\ J'(x) \cong \left(\frac{2x_1}{1^3} - 4x_1^3, \frac{2x_2}{2^3} - 4x_2^3, \ldots, \frac{2x_n}{n^3} - 4x_n^3, \ldots \right).$$

$$|M(x,h)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{h_n^2}{n^3} - 6x_n^2 h_n^2 - 4x_n h_n^3 - h_n^4 \right) \right| \leq \sum_n \left| \frac{1}{n^3} - 6x_n^2 - 4x_n h_n - h_n^2 \right| \cdot h_n^2 \leq \sum_n \left(\frac{1}{n^3} + 6x_n^2 + 4|x_n||h_n| + h_n^2 \right) \cdot h_n^2 \leq$$

$$\leq \sum_n \left(\frac{1}{n^3} + 6x_n^2 + 4|x_n||h_n| + h_n^2 \right) \cdot h_n^2 \leq C(x) \cdot ||h||^2$$

($\left|\sum_{n=1}^{k} \ldots\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |\ldots|$, далее $k \to +\infty$ тоже верно; каш.-швар. $\leq \Sigma$; const, $6||x||^2$, $4\langle |x|, |h|\rangle \leq 4||x||\cdot||h||$, $\sum h_n^2 = ||h||^2$; ч.т.д.)

Далее,

$$J'(x+h) - J'(x) \cong \left(\frac{2(x_1+h_1)}{1^3} - 4(x_1+h_1)^3, \ldots, \frac{2(x_n+h_n)}{n^3} - 4(x_n+h_n)^3, \ldots \right) -$$

$$- \left(\frac{2x_1}{1^3} - 4x_1^3, \ldots, \frac{2x_n}{n^3} - 4x_n^3, \ldots \right) = \underbrace{\left(\frac{2h_1}{1^3} - 12x_1^2 h_1, \ldots, \frac{2h_n}{n^3} - 12x_n^2 h_n, \ldots \right)}_{A(x)h} -$$

если $J'(u_*) \cong a(u_*) \neq \theta_H$ $\longrightarrow$ $J\left(u_* \pm \alpha \cdot \frac{a(u_*)}{\|a(u_*)\|}\right) - J(u_*) = \underset{>0}{\alpha}\left(\frac{1}{\cancel{\alpha}} \overbrace{\left\langle a(u_*), \pm \frac{\cancel{\alpha}\, a(u_*)}{\|a(u_*)\|}\right\rangle_H}^{\pm \|a(u_*)\|_H} + \frac{\bar{\bar{o}}\left(\overbrace{\left\|\alpha \cdot \frac{a(u_*)}{\|a(u_*)\|}\right\|}^{\alpha}\right)}{\alpha}\right)$

рассм. $\alpha \to +0$

только сир-е дифф-м

при дост. малых α $\underset{\ominus}{\overset{\oplus}{\gtrless}} 0$

$u_* \notin U_*$ ч.т.д.

-19.1-

если u_* – лок min(max) $\xrightarrow[\text{рассм. } \alpha \to +0 \text{ для фикс. } \forall h \neq \theta_H]{\text{фор. Тейлора } \{J''(u) \text{ – непр.}\}}$ $\underset{\text{д.б. } \geq 0 \ (\leq 0)}{J(u_* + \alpha h) - J(u_*)} = \cancel{\langle \theta_H, \alpha h \rangle_H} + \frac{1}{2}\langle b(u_*)(\alpha h), \alpha h \rangle_H + \bar{\bar{o}}\left(\|\alpha h\|_H^2\right) =$

$J'(u_*) \cong \theta_H$

$J''(u_*) \cong b(u_*)$

$= \underbrace{\|h\|_H^2 \cdot \alpha^2}_{>0}\left(\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\alpha^2}\|h\|_H^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\langle b(u_*)(\cancel{\alpha} h), \cancel{\alpha} h \rangle_H}_{\text{д.б. } \geq 0 \ (\leq 0) \text{ ч.т.д.}} + \frac{\bar{\bar{o}}\left(\|\alpha h\|_H^2\right)}{\|\alpha h\|^2}\right)$

если $\begin{cases} J''(u_*) \cong b(u_*) : \langle b(u_*)h, h \rangle_H \geq \underset{>0}{\mu}\|h\|_H^2 \quad \forall h \in H \\ J'(u_*) \cong \theta_H \end{cases}$ $\xrightarrow[\text{фор. Т.}]{\|h\|_H \to +0}$ $J(u_* + h) - J(u_*) = \underbrace{\|h\|_H^2}_{>0}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\langle b(u_*)h, h \rangle_H}{\|h\|_H^2}}_{\geq \frac{\mu}{2} > 0} + \underbrace{\frac{\bar{\bar{o}}\left(\|h\|_H^2\right)}{\|h\|_H^2}}_{\to 0}\right)$ >0

u_* – лок. min ч.т.д.

обозначим $\varphi(h) = \langle b(u_*)h, h \rangle_H$

если же только $\begin{cases} J'(u_*) \cong \theta_H \\ \langle b(u_*)h, h \rangle_H > 0 \\ \forall h \in H \end{cases}$ $\overset{\times}{\longrightarrow}$ u_* – лок. min (см. пример)

ибо возможно так!:

$0 \leq \inf_{\|h\|=1} \varphi(h) \not\ast \min_S \varphi(h)$

$0 = \inf_{\|h\|=1} \varphi(h)$, $\varphi(h) > 0$

{для поздне примера $h^k = (0, \dots 0, 1, 0, \dots)$, $\|h^k\|_{\ell_2} = 1$}

если $J : R^n \to R^1$, $\varphi(h) = \langle b(u_*)h, h \rangle_{R^n} > 0 \quad \forall h \in R^n$ $\xrightarrow{\text{Ф.Т.}}$ $\inf_{\|h\|=1} \varphi(h) = \min \varphi(h) = \varphi(h_0) = m > 0$ (S-компакт)

$J(u_* + h) - J(u_*) = \underbrace{\|h\|_{R^n}^2}_{>0}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\left\langle b(u_*)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right\rangle_{R^n}}_{\geq \frac{m}{2} > 0} + \underbrace{\frac{\bar{\bar{o}}\left(\|h\|_{R^n}^2\right)}{\|h\|_{R^n}^2}}_{\to 0}\right)$, $\frac{h}{\|h\|} \in S$

ч.т.д. >0

$\|A(x)h\|^2_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n^3}-12x_n^2\right)^2 h_n^2 \le \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2\cdot 2^2}{n^6}+2\cdot 12^2\cdot x_n^4\right)\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} h_n^2 \le C(x)\cdot\|h\|^2_{\ell^2}$ ч.т.д.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n^3}-12x_n^2\right)^2 \le \sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\left(\frac{2}{n^3}\right)^2+2\cdot 12^2\cdot x_n^4\right)$, $2\cdot 12^2\sum x_n^2 x_n^2$; $\sum x_n^4=\sum x_n^2 x_n^2 \le \sum x_n^2 \sum x_n^2 = \|x\|^4$

т.к. h входит нелинейно

$$-(\underbrace{12x_1h_1^2+4h_1^3,\dots,12x_nh_n^2+4h_n^3,\dots}_{B(x,h)}) = A(x)h + B(x,h),$$

где линейный ограниченный оператор $A(x)$ действует по правилу

$$\begin{array}{l} x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots), \\ h=(h_1,h_2,\dots,h_n,\dots) \end{array} \Rightarrow A(x)h = \left(\frac{2h_1}{1^3}-12x_1^2h_1, \frac{2h_2}{2^3}-12x_2^2h_2,\dots,\frac{2h_n}{n^3}-12x_n^2h_n,\dots\right),$$

а $||B(x,h)||_{\ell^2} = o(||h||_{\ell^2})$. Итак, гессианом $J''(x)$ будет оператор $A(x)$. Теперь рассмотрим элемент $x_* = \Theta_{\ell^2}$. Ясно, что $J'(x_*) \cong \Theta_{\ell^2}$, $\langle J''(x_*)h,h\rangle_{\ell^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2h_n^2}{n^3} > 0$ для любого h, отличного от Θ_{ℓ^2}.

$\frac{2}{n^3} = \langle J''(x_*)\bar{x}_n,\bar{x}_n\rangle \not\geq \mu\|\bar{x}_n\|^2$, $\frac{2}{n^3}\to+0$, $\mu>0$

ибо для $\bar{x}_n=(0,\dots,0,\overset{n}{1},0,\dots)$ $\|\bar{x}_n\|=1$ → только неогр. опер-р, положит-й нет!

$\|\bar{x}_n\|=\frac{1}{n}\to+0$

Тем не менее, в любой сколь угодно малой окрестности элемента x_* найдётся элемент $\bar{x}_n = (0,0,\dots,0,\frac{1}{n},0,\dots)$, причём $J(\bar{x}_n) = \frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^4} < 0 = J(x_*)$, то есть $J(x_*)$ не является даже локальным минимумом функционала $J(x)$.

$\|B(x,h)\|^2_{\ell_2} = \sum_n(12x_nh_n^2+4h_n^3)^2 = \sum_n(12x_nh_n+4h_n^2)^2h_n^2 \le \sum_n\left(2\cdot12^2x_n^2h_n^2+2\cdot4^2h_n^4\right)h_n^2 \le \sum_n\left(2\cdot12^2x_n^2h_n^2+2\cdot4^2h_n^2h_n^2\right)\cdot\sum_n h_n^2$, $\le\sum_n x_n^2$, $\le\sum_n h_n^2$

$\le\left(\text{const}\,\|x\|^2\|h\|^2+\text{const}\,\|h\|^4\right)\|h\|^2 \le c(x)\|h\|^4$

т.е. $\|B(x,h)\| \le \sqrt{c(x)}\cdot\|h\|^2$ ч.т.д.

Задачи:

Вычислить градиент и гессиан, найти первую и вторую производные по Фреше следующих функционалов:

1. $J(u) = \left|\int\limits_0^1 u(t)\,dt\right|^p$, $u(t)\in L^2[0,1]$, $p\in\mathbb{R}$.
2. $J(u) = \int\limits_0^{1/2} u^2(t)\,dt$, $u(t)\in L^2[0,1]$.
3. $J(u) = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{t^3}u(s)\,ds\right)^2 dt$, $u(t)\in L^2[0,1]$.
4. $J(u) = \int\limits_0^1 tu(t)\int\limits_0^t u(s)\,ds\,dt$, $u(t)\in L^2[0,1]$. д.з.
5. $J(u) = \int\limits_0^1 u(t)u(\sqrt{t})\,dt$, $u(t)\in L^2[0,1]$. д.з.
6. $J(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n}x_n$, $x\in\ell^2$.

   $J=\langle x,c\rangle_{\ell^2}$ $c=(e^{-1},e^{-2},\dots,e^{-4},\dots)\in\ell_2$
   $J'(x)\cong c$ $J''(x)\cong 0$ нул. опер.
7. $J(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2$, $x\in\ell^2$.
8. $J(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_nx_{n+1}$, $x\in\ell^2$.
9. $J(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(x_n\cdot\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^n x_k\right)$, $x\in\ell^2$.
10. $J(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{2n+1}\cdot\left(x_{2n}-\frac{x_{2n-1}}{2}\right)\right)^2$, $x\in\ell^2$.

2. Градиенты в линейных по управлению задачах ОУ.

Рассмотрим линейную задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t), \\ x(0)=x_0, \end{cases}$$

у в.з.

5 $J(u) = \int_0^1 u(t)\, u(\sqrt{t})\, dt, \quad u \in L^2(0,1)$ Доп. -20.1 $J'(u),\ J''(u)$ — ?

4 $J(u) = \int_0^1 t\, u(t) \left(\int_0^t u(s)\, ds\right) dt, \quad u \in L^2(0,1)$.

---

5 (+) $Au(t) = u(\underset{[0,1]}{\sqrt{t}}) : L^2_{(0,1)} \to L^2_{(0,1)}$. $A(\alpha u + \beta v) = \alpha u(\sqrt{t}) + \beta v(\sqrt{t}) \Rightarrow$ A-линейно

$$\|Au\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 u^2(\sqrt{t})\, dt = \left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{t} \\ t = y^2 \\ dt = 2y\,dy \end{array}\right\} = \int_0^1 u^2(y) \underbrace{2y}_{\le 2} dy \le 2 \int_0^1 u^2(y)\, dy = 2\|u\|^2_{L^2(0,1)}$$

A-ограничен

$$J(u) = \langle Au, u \rangle_{L^2(0,1)} \Rightarrow J'(u) \cong \overbrace{(A + A^*)u}^{a(u)} \quad J''(u) \cong \overbrace{A + A^*}^{b(u)}.$$

$$\langle Au, v \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \underbrace{u(\sqrt{t})}_{Au(t)} v(t)\, dt = \left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{t},\ t = y^2 \\ dt = 2y\,dy \end{array}\right\} = \int_0^1 u(y) \underbrace{v(y^2)\, 2y}_{A^* v(y)} dy$$

$\Rightarrow A^* v(t) = 2t v(t^2) \Rightarrow J'(u) : J'(u)h = \langle (A + A^*)u, h \rangle_{L^2_{(0,1)}}$ где $\underbrace{(A + A^*)u}_{a(u)} = u(\sqrt{t}) + 2tu(t^2)$

$$= \int_0^1 [u(\sqrt{t}) + 2tu(t^2)]\, h(t)\, dt$$

$\Rightarrow J''(u) : (J''(u)h)g = \langle b(u)h, g \rangle_{L^2(0,1)} = \langle (A + A^*)h, g \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 [h(\sqrt{t}) + 2th(t^2)]\, g(t)\, dt$

---

4 (+) $Au(t) = t \int_0^t u(s)\, ds \in L^2(0,1) \Rightarrow A : L^2_{(0,1)} \to L^2_{(0,1)}$. A-линейно, очевидно

$$\|Au\|^2 = \int_0^1 \underbrace{t^2}_{\le 1} \left(\int_0^t u(s)\, ds\right)^2 dt \le \int_0^1 \left|\int_0^t u(s)\, ds\right|^2 dt \le \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^t |u(s)|\, ds\right)^2}_{\le \int_0^1} dt \le \Big(\underbrace{\int_0^1 |u(s)|\, ds}_{\langle |u|, 1 \rangle_{L^2(0,1)}}\Big)^2 \le$$

$$\le \|u\|^2_{L^2(0,1)} \cdot \|1\|^2_{L^2(0,1)} = \|u\|^2_{L^2(0,1)}$$

A-ограничено

$\xRightarrow{\text{тогда}} J(u) = \langle Au, u \rangle_{L^2(0,1)} \Rightarrow J'(u) \cong a(u) = (A + A^*)u \quad J''(u) \cong b(u) = A + A^*$.

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 t\left(\int_0^t u(s)\, ds\right) v(t)\, dt = \int_0^1 \left(\int_0^t u(s)\, ds\right) \frac{d}{dt}\left(\int_1^t s v(s)\, ds\right) = \int_0^t u(s)\, ds \cdot \cancel{\int_1^t s v(s)\, ds}\Big|_0^{1 \to 0} - \int_0^1 u(t) \left(\int_1^t s v(s)\, ds\right) dt =$$

$$= \int_0^1 u(t) \underbrace{\left(\int_t^1 s v(s)\, ds\right)}_{A^* v(t)} dt$$

$$A^* v(t) = \int_t^1 s \frac{d}{ds}\left(\int_1^s v(\tau)\, d\tau\right) ds = s \int_1^s v(\tau)\, d\tau \Big|_t^1 - \int_t^1 \left(\int_1^s v(\tau)\, d\tau\right) ds = \boxed{t \int_t^1 v(\tau)\, d\tau - \int_t^1 \left(\int_1^s v(\tau)\, d\tau\right) ds}$$

$$\Rightarrow \boxed{a(u) = t \int_0^t u(s)\, ds + t \int_t^1 u(s)\, ds - \int_t^1 \left(\int_1^s u(\tau)\, d\tau\right) ds = t \underbrace{\int_0^1 u(s)\, ds}_{} - \int_t^1 \left(\int_1^s u(\tau)\, d\tau\right) ds}$$

$$\boxed{(J''(u)h)g = \langle b(u)h, g \rangle = \int_0^1 \left[t \int_0^1 h(s)\, ds - \int_t^1 \left(\int_1^s h(\tau)\, d\tau\right) ds\right] g(t)\, dt = \int_0^1 h(s)\, ds \int_0^1 \left(\int_1^t g(s)\, ds\right) dt - \int_0^1 \int_t^1 \left(\int_1^s h(\tau)\, d\tau\right) ds\, g(t)\, dt}$$